$\cdot \forall n \in IN^*, \forall t \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ on a $\frac{t}{t-Logt} > 0$

$\Rightarrow \forall n \in IN^*, v_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{t-Logt} dt > 0$

Ainsi $\forall n \in IN^*, 0 < v_n \leq \frac{1}{2}$ par suite $0 \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leq \frac{1}{2}$

2/a- Pour tout t de $[1;+\infty[$;

$$\frac{t}{t-Logt} - (1+Logt) = \frac{t-(1+Logt)(t-Logt)}{t-Logt}$$

$$= \frac{t-t+Logt-tLogt+(Logt)^2}{t-Logt}$$

$$= \frac{Logt[1-t+Logt]}{t-Logt} = \frac{Logt[1-(t-Logt)]}{t-Logt}$$

$$= \frac{Logt[1-h(t)]}{t-Logt} \leq 0 \text{ car } \forall t \in [1;+\infty[; h(t) \geq 1.$$

Enfin $\forall t \geq 1; \frac{t}{t-Logt} \leq 1+Logt$.

★ $\forall n \in IN^*$; $\forall t \in [1,n]$ on a : $\frac{t}{t-Logt} \leq 1+Logt$

$\Rightarrow \forall n \in IN^*$; $w_n = \int_1^n \frac{t}{t-Logt} dt \leq \int_1^n (1+Logt)dt$

$$\left(\begin{array}{ccc} u'(t)=1 & \rightsquigarrow & u(t)=t \\ v(t)=1+Logt & \rightsquigarrow & v'(t)=\frac{1}{t} \end{array} \right)$$

$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*$; $w_n \leq [t(1+Logt)]_1^n - \int_1^n 1dt$

$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*$; $w_n \leq n + nLogn - 1 - n + 1$

$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*$; $w_n \leq nLogn$.

b- $\int_1^n \left(1+\frac{Logt}{t}\right)dt = \int_1^n \left(1+\frac{1}{t}Logt\right)dt$

$$= \left[t+\frac{1}{2}(Logt)^2\right]_1^n = n+\frac{1}{2}(Logn)^2 - 1.$$

$\star \forall t \geq 1$

$$1+\frac{Logt}{t} - \frac{t}{t-Logt} = \frac{t(t-Logt)+Logt(t-Logt)-t^2}{t(t-Logt)}$$

$$= \frac{-(Logt)^2}{t(t-Logt)} \leq 0$$

D'où $\forall t \geq 1; 1+\frac{Logt}{t} \leq \frac{t}{t-Logt}$

par suite $\forall n \in IN^*; \int_1^n \left(1+\frac{Logt}{t}\right)dt \leq \int_1^n \frac{t}{t-Logt} dt = w_n$

$\Leftrightarrow \forall n \in IN^*; n+\frac{1}{2}(Logn)^2 - 1 \leq w_n$

D'autre part : $n \geq 5 \Leftrightarrow Logn \geq Log5$